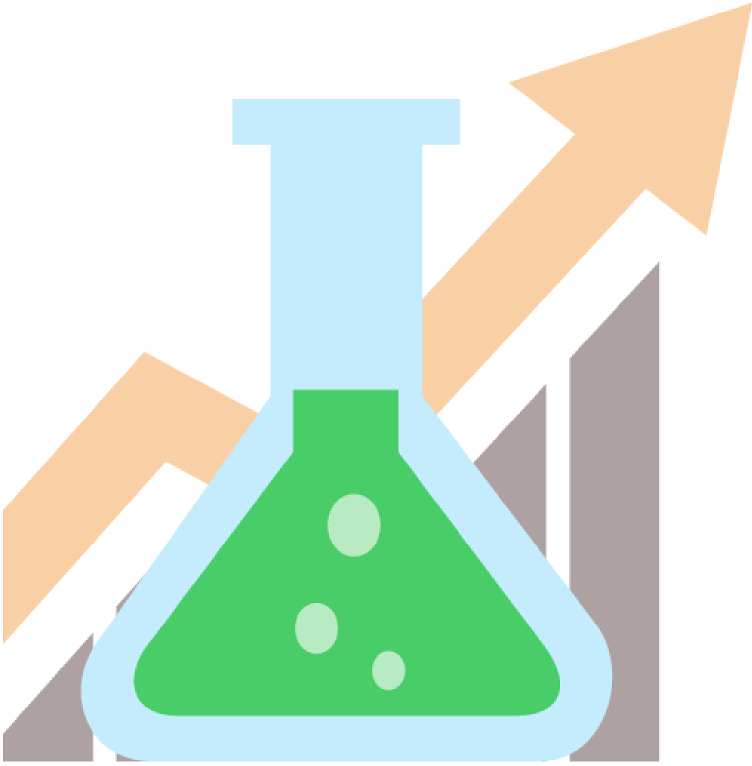


Asset Allocation Quantitativa

Lezione 3 – Un pizzico di statistica

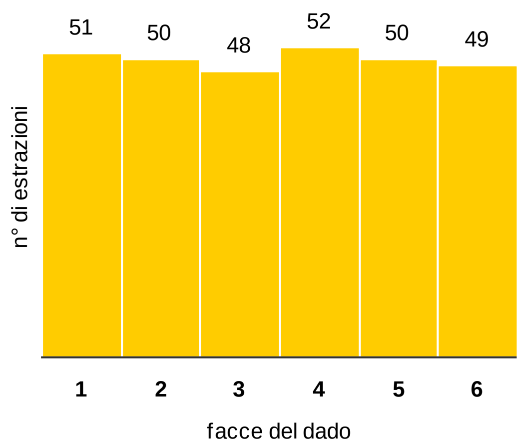
Un passatempo invernale

Immaginiamo un lungo, buio e noioso pomeriggio piovoso invernale in cui, non avendo nulla di meglio da fare, decidiamo di cimentarci nel seguente passatempo apparentemente stupido: prendiamo un dado da gioco e cominciamo a lanciarlo centinaia di volte annotando, su un foglietto, il numero di volte che esce ciascuna delle 6 facce. Vista la tristezza della giornata ed il pessimo umore che ci pervade siamo convinti che saranno molto più numerosi gli 1 e i 2 rispetto ai 5 ed ai 6, tuttavia scopriamo, con nostra sorpresa, che non è così. Abbiamo lanciato il dado trecento volte e osserviamo che tutti i numeri sono usciti grosso modo lo stesso numero di volte (circa 50 volte ciascuno)!

Cos'è accaduto? Come mai tutto ciò?

Il nostro gioco "inutile" ci ha portato a toccare con mano un tipico esempio di quelle che in statistica vengono definite "distribuzioni di frequenza uniformi". La distribuzione di frequenza è il foglietto sul quale abbiamo annotato il numero di volte in cui sono uscite le facce del dado. E', in sostanza, la frequenza con cui un certo fenomeno (l'uscita di una determinata faccia del dado) si realizza. La distribuzione è uniforme quando tutti i possibili fenomeni (l'uscita delle 6 facce del dado) si realizzano con la stessa frequenza (ossia lo stesso numero di volte).

Il grafico qui a lato è, per l'appunto, una rappresentazione della distribuzione di frequenza. In esso ci sono tante barre quanti i fenomeni osservabili (le 6 facce del dado) e ogni barra ha un'altezza proporzionata al numero di volte che quel particolare fenomeno è stato osservato (la frequenza). Il numero 1 è uscito cinquantuno volte, il 2 cinquanta, il 3 quarantotto e così via.



Il dado, si sa, si compone di sole 6 facce e ciascuna di esse ha la stessa probabilità di uscire. Ogni lancio è un lancio nuovo e ad ogni lancio ogni faccia ha 1 probabilità su 6 di uscire.

Effettuando solo pochi lanci potremmo osservare che alcune facce non escono mai; tuttavia, se il numero di lanci diventa sufficientemente ampio, cominciamo a vedere gli effetti dell'equiprobabilità di uscita che caratterizza tutte le facce del dado. Questo significa che, per un numero infinito (oppure estremamente grande) di lanci, tutte le sei barre del nostro grafico avranno esattamente la stessa altezza (di qui il termine "uniforme").

Questo semplice ed intuitivo concetto è alla base della maggior parte dei giochi da casinò. Quando, giocando alla roulette, scommettiamo 1 euro sul colore nero sappiamo che ne incasseremo 2 in caso di vittoria mentre perderemo l'euro giocato se uscirà il rosso o verde (corrispondente allo zero). Dal momento che una roulette si compone di 18 caselle nere, 18 caselle rosse ed una verde, noi abbiamo 18 probabilità su 37 di vincere (circa il 48,7%) e 19 di perdere. Simmetricamente il casinò ha 19 probabilità su 37 di vincere (circa il 51,3%) e 18 su 37 di perdere.

Il casinò, diversamente da noi che giochiamo solo occasionalmente, può affidarsi alla legge dei grandi numeri e confidare sul fatto che dopo un grandissimo numero di lanci ogni casellina sarà uscita lo stesso numero di volte. Se, infatti, ogni numero ha le stesse probabilità di uscire di tutti gli altri, allora la distribuzione di frequenza dovrà essere uniforme. Se, in una giornata di attività, la roulette sarà stata fatta girare mille volte, sappiamo già che nel 51,3% dei casi (ossia 513 lanci) il casinò avrà incassato l'euro giocato dai diversi giocatori, mentre nei rimanenti 487 giri di ruota il casinò avrà dovuto restituire l'euro pagandone uno aggiuntivo. Il profitto del casinò, a fine giornata, sarà pari alla differenza fra i 513 euro incassati e i 487 pagati per le vincite.

Nell'esempio appena fatto, tutto è particolarmente semplice. I fenomeni che è possibile osservare sono un numero ben preciso e limitato: le 6 facce del dado oppure le 37 caselline di una roulette. Le probabilità associate a ciascun singolo evento sono costanti: 1/6 per ciascuna faccia del dado (pari a circa il 16,67%) oppure 1/37 per i numeri della roulette (pari a circa il 2,70%). Possiamo quindi facilmente affermare di avere il 16,67% di probabilità di indovinare il numero che uscirà dopo il lancio di un dado oppure, meglio ancora, di avere l'83,3% di probabilità di indovinare il numero che non uscirà al prossimo lancio. Ovviamente sarebbe molto bello poter affermare, con la stessa certezza, quali siano le probabilità associate ad un valore di rendimento che un certo strumento finanziario potrebbe mettere a segno nel corso della prossima settimana. Oppure poter asserire che nel x% dei casi tale rendimento sarà positivo.

Per poter formulare questo genere di affermazioni occorre focalizzare l'attenzione non già sui risultati del lancio di un dado, ma sui rendimenti settimanali dello strumento finanziario di nostro interesse. Ecco che tutto si complica. I rendimenti possibili (ossia, lo ricordiamo, le variazioni percentuali di prezzo) non sono un numero finito noto a priori (come le sei facce del dado), ma possono essere considerati infiniti. Le probabilità associate a ciascuno di essi, inoltre, non sono così semplici da assegnare. Ovviamente non tutti i rendimenti possibili hanno pari probabilità di realizzarsi.

Torniamo all'esempio del titolo zero coupon (ZC) con un anno di vita residua. È intuitivo ipotizzare che le probabilità che lo ZC si apprezzi del 10% nel corso della prossima settimana sono molto basse (ipotizzando tassi di mercato prossimi all'1% annuo). Sappiamo che uno zero coupon matura un rateo di rivalutazione giornaliera molto prossimo al livello dei tassi privi di rischio per pari scadenza. In una settimana, quindi, il rendimento dovrebbe essere molto vicino ad un cinquantaduesimo del tasso annuo di riferimento.

Sappiamo quindi che il rendimento più probabile è pari a 1/52 x 1% = 0,019% (circa 2 punti base). Ogni altro rendimento possibile sarà tanto meno probabile quanto più si allontana da questo livello.

Proviamo ora a complicarci ulteriormente la vita e a cercare di stimare le probabilità associate al rendimento settimanale di un certo indice azionario. In questo caso non abbiamo grandi certezze. Possiamo intuitivamente immaginare che le probabilità che tale rendimento sia del 15% sono inferiori a quelle che sia del 5% e maggiori a quelle che sia del 50%. A livello intuitivo, infatti, siamo portati a pensare che i movimenti più ampi (o addirittura estremi) siano meno probabili degli altri. Quante volte l'indice S&P Mib ha segnato rendimenti settimanali superiori al 10% negli ultimi 10 anni? Probabilmente molto poche. In effetti, se andiamo a controllare, scopriamo che ciò è avvenuto solo 4 volte.

Se invece cerchiamo il numero di volte che il rendimento settimanale è stato pari o superiore al 3%, scopriamo che esse sono 83. Se poi contiamo i rendimenti superiori allo 0% essi diventano 345. La storia dimostra, quindi, ciò che ci appare del tutto ragionevole: rendimenti estremi sono meno frequenti, e quindi meno probabili, di rendimenti più contenuti.

Possiamo completare il quadro analizzando i rendimenti settimanali negativi per scoprire che quelli inferiori a -10% dal '98 ad oggi sono solo 5, quelli inferiori a -3% sono 95 e quelli inferiori allo zero sono 278!

Un aiuto dalla statistica

Queste osservazioni ci aiutano a capire che una formula capace di descrivere la distribuzione di frequenza dei rendimenti di uno strumento finanziario dovrà rispettare due caratteristiche fondamentali:

1 – assegnare minori probabilità ai rendimenti che, in valore assoluto, sono maggiori e, simmetricamente, maggiori probabilità di realizzo ai rendimenti di minore ampiezza. Rendimenti settimanali del -10% o del +10% dovranno essere meno probabili di rendimenti settimanali del -2% o del +2%.

2 – adattarsi alle peculiarità dello strumento finanziario cui si riferisce. Rendimenti del +10% per un titolo obbligazionario a breve termine dovranno essere meno probabili di rendimenti del +10% per l'indice S&P Mib.

Ancora una volta la statistica ci viene in aiuto fornendoci una distribuzione di frequenza che rispetta queste caratteristiche e che ci permette di fare un esercizio estremamente utile:

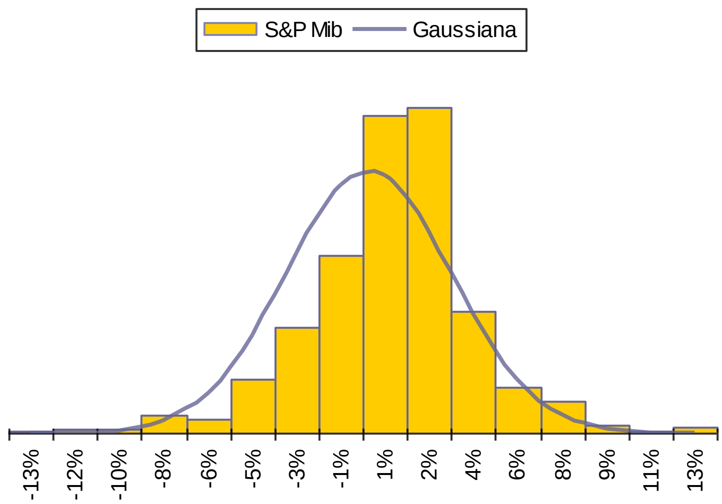
<u>quantificare, seppure con un certo margine di errore, la probabilità che il rendimento di un certo asset finanziario sia superiore o inferiore ad un determinato livello.</u>

Non si tratta di una cosa di poco conto. Se sappiamo che le probabilità che l'indice di borsa batta il rendimento di un BTP sono molto basse, allora potremmo decidere di escluderlo dalla nostra asset allocation. Oppure se prevediamo che le probabilità di realizzare un rendimento negativo sono troppo alte, potremmo decidere di modificare il nostro portafoglio.

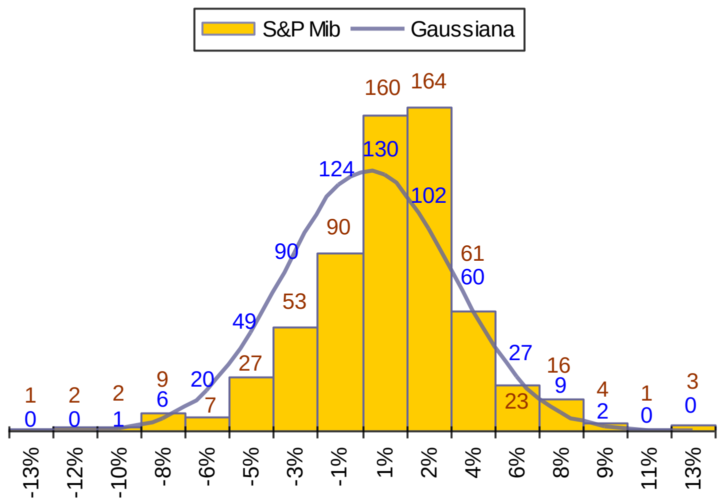
La distribuzione di cui parliamo si chiama "distribuzione normale" ed è particolarmente famosa per la sua caratteristica forma a campana. Essa assegna massima probabilità al valore centrale e probabilità via via decrescenti ai valori a sinistra e a destra che, in valore assoluto, risultano più ampi.

Per descrivere questo tipo di distribuzione sono sufficienti due soli elementi: la media (ossia il valore centrale) e la varianza delle osservazioni. Data la semplicità con la quale è possibile maneggiare questo strumento, viene subito voglia di vedere se esso sia effettivamente calzante ai rendimenti di mercato reali. La prova è di rapidissima realizzazione. Prendiamo, per proseguire con l'esempio del mercato azionario italiano, tutti i rendimenti settimanali dell'S&P Mib dal 1998 fino alla fine del 2009 e ne calcoliamo il valore medio. Il dato ottenuto rappresenta, molto semplicemente, la variazione percentuale media settimanale dell'indice. È quello che, se ricordate l'esempio fatto con le classi di studenti di matematica, potremmo prendere come aspettativa di rendimento settimanale futuro (vedremo, in seguito, come alla media si possano sostituire altri indicatori sia quantitativi che qualitativi). Il valore ottenuto è 0,043% e rappresenta il valore centrale (la parte alta) della nostra campana. A questo punto, sempre sulla stessa serie storica di dati, calcoliamo la deviazione standard seguendo il procedimento descritto nella scorsa lezione di questo corso e otteniamo il valore di 0,03275.

Armati di media e deviazione standard disegniamo la corrispondente distribuzione normale di frequenza (curva in **blu**) e la sovrapponiamo alla distribuzione di frequenza dei rendimenti osservati (barre in **arancio**) ed otteniamo il seguente grafico:



Le barre gialle rappresentano il numero di volte che sono stati osservati i differenti livelli di rendimenti settimanali. Possiamo notare un'indiscutibile somiglianza ma, allo stesso tempo, vediamo anche una chiarissima “non corrispondenza”. La distribuzione normale, infatti, si avvicina alla realtà, ma è ben lungi da rappresentarla con esattezza. Uno dei principali limiti di essa risiede nella sistematica tendenza a sottostimare le probabilità associate agli eventi estremi. Nel prossimo grafico riproponiamo la stessa immagine precedente indicando in marrone le frequenze osservate ed in blu quelle previste dalla distribuzione normale:



Osservando la parte sinistra del grafico vediamo che rendimenti inferiori al -10% si sarebbero dovuti osservare una sola volta secondo la gaussiana mentre sono stati osservati 5 volte nella realtà. Può sembrare poco, ma si tratta di un errore del 500%!

Spostando lo sguardo alla parte opposta del grafico vediamo che rendimenti superiori al +9% si sarebbero dovuti osservare 2 volte mentre, nella realtà, si sono verificati 8 volte. In questo caso l’errore è del 400%.

In realtà non stiamo dicendo nulla di nuovo. Questo tipo di distribuzione non descrive fedelmente le reali distribuzioni di frequenza dei rendimenti che si osservano sul mercato. **Le probabilità assegnate dalla gaussiana (altro nome della “curva a campana”) non coincidono mai con le frequenze realmente osservate.**

Questo problema è assai noto e rappresenta la principale causa di errore nei modelli di gestione del rischio e di pricing degli strumenti derivati. Nonostante ciò, almeno per il momento, essa rappresenta il migliore degli strumenti disponibili, non foss’altro per l’approfondita conoscenza di cui ormai disponiamo sui suoi limiti di applicabilità.

Perché la Gaussiana?

A questo punto potremmo chiederci perché incaponirsi sulla gaussiana e non ricorrere a soluzioni alternative. La letteratura finanziaria è ricca di proposte che vanno in questo senso (chi fa ricorso alla distribuzione di Cauchy, chi alla geometria frattale) tuttavia, almeno per il momento, l'apparato matematico costruito attorno alla distribuzione normale offre possibilità ineguagliate e, con la consapevolezza dei limiti ad essa associati e con l'ausilio di altri strumenti che descriveremo in seguito, permette di costruire asset allocation estremamente performanti.

Un primo vantaggio della distribuzione normale è, come già accennato in precedenza, la possibilità di descriverla compiutamente con solo due parametri: la media e la varianza.

Vediamo quindi di capire meglio cosa intendiamo utilizzando i dati di media e deviazione standard calcolati in precedenza per l'indice S&P Mib: variazione settimanale media dell'indice = 0,043% e deviazione standard = 0,03275.

Questo tipo di distribuzione prevede una relazione molto precisa fra probabilità, media e deviazione standard. Ad esempio, essa ci dice che l'84,12% delle osservazioni avrà un valore inferiore alla somma tra media e deviazione standard. Nel nostro esempio, quindi, possiamo affermare che nell'84,12% dei casi il rendimento settimanale dell'indice sarà inferiore a 0,043% + 0,03275 ossia inferiore a 3,32%. Se andiamo a vedere quanti dei 623 rendimenti settimanali della nostra serie storica risultano inferiori a questa soglia scopriamo che sono 548 ossia l'88% del totale. La corrispondenza non è certamente esatta, ma l'indicazione è molto rapida da calcolare e per nulla lontana dalla realtà.

Analogamente, la distribuzione normale ci dice che nel 24% dei casi il rendimento settimanale sarà compreso fra 1,5% e 4,5%. In effetti, andando ad analizzare la serie storica, vediamo che in questo range sono compresi 143 dei 623 rendimenti settimanali ossia il 23% delle osservazioni (la gaussiana ci diceva 24%)!

Il procedimento che ci porta a calcolare le probabilità degli esempi fatti va al di là dello scopo di questo corso introduttivo. Il lettore che si stia domandando da dove saltino fuori tutte queste previsioni si accontenti di sapere che non c'è nulla di magico ma che il tutto è da ricondurre alla funzione di densità di probabilità che, in questa sede, abbiamo scelto di non approfondire.

Ciò che è invece importante capire è che la distribuzione normale ci permette di lavorare bene con i dati di rendimento anche quando questi non siano effettivamente distribuiti in modo normale perfetto. Le maggiori aree di errore, infatti, si collocano alle estremità della funzione.

Se proviamo a calcolare la probabilità che il rendimento settimanale dell'indice sia inferiore al -10% vediamo che essa risulta dello 0,12%. Se invece controlliamo la frequenza osservata di rendimenti inferiori a tale soglia, vediamo che essa è dello 0,80%. Questo errore è, da un punto di vista matematico, molto rilevante. Lo stesso accade se facciamo la verifica per rendimenti superiori al +10%: la probabilità è dello 0,12% mentre la frequenza osservata è dello 0,64%.

Per concludere sulla gaussiana

Per farla breve possiamo concludere che i grandi vantaggi del ricorso alla distribuzione normale (dei quali, per il momento, abbiamo visto solo il primo) possono essere tranquillamente mantenuti tenendo presenti i limiti che essa pone quando si ragiona agli estremi della distribuzione. Essa non è un buon indicatore delle probabilità che si verifichino eventi catastrofici. Crisi come quelle del 2007/2008 non sono assolutamente prevedibili da questa "semplificazione statistica". Tuttavia, immaginando di operare in condizioni di mercato "normali", essa ci permette di utilizzare degli strumenti di asset allocation che, come vedremo, permettono di costruire portafogli davvero molto efficienti. Inoltre, il ricorso a questo set di modelli (dei quali parleremo nelle prossime lezioni), non preclude affatto la possibilità di associare altri strumenti di valutazione dei rischi estremi che possano ovviare alle limitazioni imposte dal ricorso alla distribuzione normale.